



Rysunek 6.8. Odwzorowanie pierwszego powrotu

Odwzorowanie Poincarégo dostarcza informacji o trajektoriach okresowych. Jeżeli $P(x_0) = x_0$, czyli x_0 jest punktem stałym odwzorowania Poincarégo, to trajektoria tego punktu jest okresowa. Odwrotnie, jeśli Γ przecina pewną trajektorię okresową w punkcie x_0 , to jest on punktem stałym odwzorowania Poincarégo. Ponadto badanie pochodnej tego odwzorowania w punkcie x_0 dostarcza informacji o stabilności trajektorii okresowej γ , o czym mówi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 6.5. [2, Proposition 23.5] *Jeśli*

$$|\sigma(\mathcal{J}_P(x_0))| < 1,$$

to γ jest asymptotycznie stabilna.

Zauważmy, że zastosowanie odwzorowania Poincarégo do układów dwóch lub trzech równań różniczkowych znacznie upraszcza badanie tych układów, ponieważ wymiar przestrzeni, w której prowadzimy analizę zmniejsza się o 1.

Przykład 6.9. Rozważmy układ (4.25), który we współrzędnych biegunowych przyjmuje postać

$$\begin{cases} r' = r(1 - r) \\ \theta' = 1 \end{cases}.$$

Przyjmijmy następujące warunki początkowe: $r(0) = x$, $\theta(0) = 0$. Wówczas otrzymujemy

$$r(t, x) = \frac{xe^t}{1 - x + xe^t}, \quad \theta(t) = t,$$